

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Comunicazioni pervenute all'Accademia sino al 17 settembre 1905.

~~~~~

**Fisiologia.** — *Ancora sulla cura della rabbia coi raggi del radio e sul loro meccanismo d'azione.* III Comunicazione preventiva dal Socio G. TIZZONI e del dott. A. BONGIOVANNI.

Dalle nostre precedenti comunicazioni è risultato <sup>(1)</sup>:

1° Che i raggi del radio esercitano in vitro una rapida azione scomponente sul virus rabido fisso, il quale, dopo due ore di questo trattamento, ha perduto tutta la sua virulenza;

2° Che la stessa azione i raggi del radio esercitano nell'animale al quale il virus è stato precedentemente iniettato;

3° Che il risultato è sempre identico qualunque sia la parte nella quale fu praticata l'infezione (occhio, spazio subdurale del cervello, nervo sciatico) e qualunque sia la distanza fra questa ed il punto del corpo sul quale viene diretta l'azione del rimedio;

4° Che i raggi del radio, oltre ad agire efficacemente sul virus fisso quando la loro azione è cominciata subito dopo praticata l'infezione (metodo contemporaneo), esercitano sullo stesso virus anche una vera e propria azione curativa, salvando gli animali fino ai  $\frac{2}{3}$  della malattia che uccide i controlli in 7 giorni, e quando il coniglio già presentava segni manifesti della

<sup>(1)</sup> *L'azione dei raggi del radio sul virus rabido in vitro e nell'animale.* I. Comunicazione preventiva, letta alla R. Accad. delle Scienze di Bologna nella seduta del 9 aprile 1905; *La cura della rabbia coi raggi del radio*, II. Comunicazione preventiva, letta alla R. Accad. delle Scienze di Bologna nella seduta del 28 maggio 1905.

rabbia (febbre, diminuzione del peso corporeo, indebolimento palese degli arti posteriori);

5° Che gli effetti del radio nell'animale, tanto per l'azione contemporanea, quanto per l'azione curativa sul virus rabido, sono in stretto rapporto con l'intensità della sorgente radio-attiva e con la durata della sua applicazione;

6° Che a parità di condizioni l'applicazione dei raggi del radio sull'occhio ha una potenza almeno 10 volte superiore a quella della applicazione su altre parti del corpo (metà del dorso in corrispondenza della colonna vertebrale);

7° Che nelle condizioni dei nostri esperimenti, mai si ebbero alterazioni apprezzabili nell'occhio, tanto nelle parti esterne, quanto nei mezzi ottici; nè si avvertì che l'animale mostrasse alcun disturbo nella visione;

8° Che il virus fisso scomposto dai raggi del radio si trasforma in un eccellente vaccino, di cui una goccia o frazione di goccia iniettata nell'occhio conferisce all'animale una solida immunità contro il virus da strada che uccide i controlli in 20 giorni.

Ora, seguitando in queste nostre ricerche, noi abbiamo creduto giunto il momento di affrontare alcune questioni scientifiche e pratiche del maggiore interesse; le une dirette principalmente a rischiarare il meccanismo col quale il radio esercita nella rabbia la sua azione curativa; le altre rivolte a stabilire in questa cura gli estremi di tempo e di dose del rimedio, e a rilevare quei criteri che devono servire di norma per le applicazioni pratiche sull'uomo.

Come fu già dichiarato nella nostra seconda pubblicazione, e come fu riferito più sopra, *l'applicazione del radio, anche su parti molto delicate come l'occhio, e per un tempo molto lungo (12 ore), non determina mai alterazioni apprezzabili.*

E poichè questo sta in aperta contraddizione con quanto si conosce al riguardo, cioè che il radio applicato direttamente sulla pelle è capace determinare, tanto nell'uomo quanto negli animali (coniglio-cavia), alterazioni locali di qualche rilievo, così era nostro dovere di spiegare per prima la ragione di tale divergenza.

Sta in fatto che noi, solo in alcuni fra i primi esperimenti in vitro, abbiamo usato il radio in soluzione (2 ctg. di bromuro di radio in 5 cc. di acqua); in questi la provetta contenente la soluzione del radio era messa direttamente in comunicazione mediante tubo ad U con quella che conteneva la diluzione del virus rabido, nella quale per giunta era immerso un tubo di vetro chiuso alla lampada con gr. 0,1 di bromuro di radio del valore di 10,000 U.R. (1).

(1) Sempre come nelle precedenti comunicazioni le lettere U.R. stanno ad indicare unità radio-attive.



Invece, negli altri esperimenti in vitro ed in tutti quelli in vivo, fu usato esclusivamente radio allo stato solido contenuto in un tubo chiuso alla lampada, ed assai più di frequente 2 ctg. di bromuro di radio puro del valore di 100,000 U.R. contenuto nell'apparecchio di M. Armet de Lisle, che, come è noto, è chiuso anteriormente, cioè dalla parte dalla quale si applica, da una sottile lamina di mica a tenuta perfetta.

Aggiungiamo poi, che mentre questo ultimo apparecchio era messo mediante una cuffia, ad un foro della quale era cucito con pochi punti, quasi a contatto dell'occhio, dal quale perciò rimaneva diviso solo a mezzo delle palpebre, invece il tubetto col radio di cui si è tenuto parola era applicato sull'occhio mediante uno scodellino di piombo, nel fondo del quale era fissato; quindi in questo caso il radio rimaneva sempre ad una certa distanza, di circa  $\frac{1}{2}$  cent., dalla superficie della cornea.

Date queste condizioni, per le quali erano escluse nei nostri esperimenti le emanazioni del radio, deve pensarsi che a queste, più che alle radiazioni, sono da attribuirsi le alterazioni che esso produce sulla parte.

Noi non abbiamo potuto avere di ciò la prova diretta, perchè non possiamo alcun campione di radio fissato su sopporto di metallo con vernice speciale da far agire direttamente, all'aperto, sulla pelle e sull'occhio, per vedere se effettivamente in queste condizioni si producono le lesioni ottenute dal Danysz colla diretta applicazione di 1 gr. di cloruro di bario radifero del valore di 500,000 U.R. sulla pelle della cavia e del coniglio.

Quello che possiamo affermare peraltro si è, che nel modo col quale abbiamo sperimentato, cioè con radio chiuso in tubo di vetro saldato alla lampada o difeso da uno schermo di mica a tenuta perfetta mediante chiusura a vite, le ricordate alterazioni mancano in modo assoluto; quindi è certo che una volta escluse le emanazioni del radio, questo, anche per lunghe applicazioni sull'occhio della durata di 12 ore, non determina mai lesione alcuna.

Da questa conclusione ne emerge spontanea l'altra, che se nei nostri esperimenti erano escluse le emanazioni del radio, non si poteva riferire a queste l'azione curativa del rimedio (1).

E che le emanazioni del radio non prendano effettivamente alcuna parte nei nostri esperimenti, questo, non solo risulta dalle condizioni ricordate degli apparecchi che servirono per la sua applicazione, ma anche dai risultati delle esperienze che seguono, in cui operando sui raggi ed eliminandone alcuni, gli effetti sugli animali sono molto diversi, per quanto le emanazioni rimangano indisturbate.

(1) Con ciò cade intieramente quanto ha affermato il dott. Rehms in una recente pubblicazione (Comptes-rendus hebdomadaires de la Société de Biologie, 18 mars 1905), cioè che la scomposizione in vitro del virus rapido fisso per mezzo del radio dipende esclusivamente dalle sue emanazioni e non dalle radiazioni.



Escluse le emanazioni del radio, rimaneva da vedere se tutti e tre i raggi  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , prendevano parte alla neutralizzazione e alla distruzione del virus rabido, o se alcuno di essi esercitava questa azione distruttrice in modo predominante.

A tal fine in una prima serie di esperimenti abbiamo esclusi i raggi  $\alpha$ , sostituendo allo schermo di mica dell'apparecchio di M. Armet de Lisle, uno schermo di alluminio della grossezza di mm. 0,1; in una seconda serie di esperimenti si eliminarono i raggi  $\alpha$  e  $\beta$ , deviandoli lateralmente per mezzo di una potente calamita a fascio disposta verticalmente coi poli in basso, e comprendente fra le sue branche la scatoletta col radio applicata nel modo solito sull'occhio dell'animale.

Che nell'ultimo caso vi sia stata effettivamente la deviazione dei raggi  $\alpha$  e  $\beta$ , questo ci fu dimostrato dalla prova fisica positiva, che dobbiamo alla squisita gentilezza del prof. G. Bongiovanni della L. Università di Ferrara. Infatti egli, valendosi degli stessi nostri apparecchi disposti in modo identico a quello usato nelle ricordate esperienze sugli animali, ha potuto dimostrare che la deviazione dei raggi ha luogo perpendicolarmente al piano che passa per i poli; e se l'osservatore si pone dinanzi alla calamita col polo nord alla sua sinistra e col polo sud alla sua destra, i raggi  $\alpha$  e  $\beta$  si dirigono rispettivamente dall'indietro all'avanti e dall'avanti all'indietro.

In tal modo eravamo sicuri che i raggi  $\alpha$  e  $\beta$  sarebbero stati deviati perpendicolarmente al piano magnetico ed in senso opposto, mentre i raggi  $\gamma$  avrebbero proseguito indisturbati il loro cammino, investendo da soli la parte (occhio) sulla quale il radio era stato applicato.

Finalmente in una serie di esperienze di controllo si usava il solo apparecchio di Armet de Lisle, ma con semplice schermo di mica, per vedere, in confronto delle prove precedenti, gli effetti di tutte e tre le radiazioni riunite,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

L'azione dei raggi del radio che non erano trattenuti dallo schermo di alluminio o deviati dalla calamita ( $\beta + \gamma - \alpha$ ;  $\gamma - \alpha + \beta$ ) era ricercata col metodo contemporaneo, cioè cominciandone l'applicazione subito dopo praticata l'iniezione subdurale con virus fisso diluito in brodo nella proporzione di 1-2 %, e continuandola per 8 ore consecutive. Solo nel caso in cui si operava coi raggi  $\gamma$  separati dagli altri due, dovendo gli animali esser fissati sull'apparecchio, e non volendo che per una immobilizzazione troppo prolungata avessero a risentire qualche disturbo, abbiamo creduto conveniente dividere le 8 ore di applicazione del rimedio in 8 sedute di un'ora ciascuna, fatte in giorni successivi, a cominciare dal momento in cui era stata praticata l'infezione subdurale.

Peraltro, ci piace subito dichiarare, che questa variante impostaci dalle stesse condizioni tecniche dello esperimento, non doveva portare d'altra parte nessuna differenza apprezzabile nei risultati. Anzi sapevamo per la prova



fatta, che la divisione della cura in 8 sedute di un'ora ciascuna, conduce sempre ad effetti più sicuri di quella in cui il rimedio viene applicato per 8 ore consecutive in una seduta sola.

Infatti, un campione di radio di un valore piuttosto basso (10,000 U.R.), salvava l'animale quando si usava per un'ora subito dopo praticata l'iniezione subdurale e si ripeteva la cura per un'ora al giorno nei 7 giorni consecutivi, mentre nelle stesse condizioni, ma espletando la cura in una sola seduta, l'animale moriva di rabbia dopo 53 giorni dalla procurata infezione, con 46 giorni di ritardo sulla morte del controllo <sup>(1)</sup>.

Ed ora, prima di riferire i risultati ottenuti con questi esperimenti, per i quali fu sempre adoperato il campione di radio più forte (100,000 U.R.), sentiamo il bisogno di fare alcune dichiarazioni.

Noi, con queste ricerche, non avevamo, nè potevamo avere la pretesa di arrivare ad una separazione completa dei raggi di cui è questione, perchè sapevamo che alcuni mezzi, come lo schermo di alluminio sopra ricordato, se intercettano completamente i raggi  $\alpha$ , assorbono anche una porzione degli altri, che così arrivano in quantità minore alla parte esposta alle radiazioni.

Così pure la stessa disposizione dell'esperimento rendeva assai difficile di mantenere costantemente la calamita nel voluto rapporto col radio, e tanto da supporre che la deviazione dei raggi  $\alpha$  e  $\beta$  in alcuni momenti fosse meno completa.

Quindi non potevamo pretendere di avere con queste ricerche risultati così netti, così precisi come quelli che possono aversi separando per via chimica corpi mescolati o combinati insieme, ma dovevamo contentarci semplicemente di rilevare che nell'un caso, quando alcuni raggi sono stati esclusi, gli effetti curativi sulla rabbia sono assai minori che negli altri.

Dopo queste dichiarazioni, ecco i risultati da noi ottenuti con le ricerche indicate.

1° *Azione di tutti e tre i raggi riuniti  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .* In tre animali fu fatta questa prova, e tutti e tre non presentarono mai segni di malattia e sopravvivono tuttora in ottima salute; risultato questo che può considerarsi oramai come definitivo, essendo in alcuni casi passati oltre tre mesi dacchè l'esperimento fu praticato.

2° *Azione dei raggi  $\beta$  e  $\gamma$  con esclusione dei raggi  $\alpha$ .* Due animali trattati per otto ore consecutive col radio provvisto di schermo di alluminio, ammalarono per forte dimagrimento e paresi manifesta del treno posteriore

(1) Negli animali che morirono con grande ritardo, la malattia durava molti giorni ed il marasma aveva sempre il predominio sui fenomeni paralitici. Questi, poi, non interessavano mai la testa, per cui l'animale, salvo il profondo dimagrimento e la paresi più o meno accentuata degli arti, aveva tutto l'aspetto di un coniglio sano.

In tutti questi casi la diagnosi di rabbia fu sempre confermata con successivi passaggi fatti da testa a testa.



dopo 11 e dopo 15 giorni dalla praticata infezione, e morirono rispettivamente dopo 24 e dopo 17 giorni, cioè con grandissimo ritardo sui controlli che soccomberono in 7 ed in 6 giorni.

Nemmeno valse ad ottenere effetti differenti una più lunga durata della cura, perchè in un terzo animale in cui l'applicazione del radio con esclusione dei raggi  $\alpha$  fu prolungata per 12 ore, anzi che per 8, vale a dire per un tempo superiore di  $\frac{1}{3}$ , si ebbe egualmente la morte con forte ritardo su quella del controllo che avvenne in 6 giorni. Il coniglio così operato morì infatti in 17 giorni e con un quadro di rabbia molto spurio; il dimagrimento non fu così profondo come nei due casi precedenti, e la paralisi, che insorse quasi ad un tratto e interessava più il treno anteriore che quello posteriore, avvenne poco prima della morte e fu accompagnata, nelle eccitazioni provocate del corpo, da manifesto opistotono, mai da fenomeni paralitici della testa.

Da questo si può concludere che una volta esclusi i raggi  $\alpha$ , si ottengono sempre risultati incompleti, vale a dire si osserva solo una malattia più lunga e meno caratteristica, ed un fortissimo ritardo nella morte degli animali, che in un caso arrivò fino a 24 giorni dalla praticata infezione.

Ora l'interpretazione che può darsi a questi fatti non può esser che duplice; e cioè, o che lo schermo di alluminio porta ad un risultato incompleto, perchè mentre assorbe totalmente i raggi  $\alpha$ , diminuisce anche l'intensità delle radiazioni  $\beta$  e  $\gamma$ , o che effettivamente i raggi  $\alpha$  sono necessari accanto agli altri due per aversi un risultato completo.

Per decidere quale delle due spiegazioni sia giusta, converrà prolungare ancora l'applicazione del radio fornito del solito schermo di alluminio, per vedere se il parziale assorbimento dei raggi  $\beta$  e  $\gamma$  può essere intieramente compensato da una più lunga applicazione del rimedio. In questo caso si potrà usare anche una foglia di alluminio più sottile, di  $\frac{m}{m}$  0,0238, anzi che di  $\frac{m}{m}$  0,1 come quella adoperata nei nostri esperimenti, perchè sappiamo dalle ricerche di M. Rutherford e Miss Brooks <sup>(1)</sup> essere la prima sufficiente a determinare l'assorbimento completo dei raggi  $\alpha$ . Ed allora potremo, dal tempo necessario per ottenere un risultato completo, di fronte a quello che basta allo stesso effetto quando si usa uno schermo di mica, determinare altresì, e con tutta precisione, quanti raggi  $\beta$  e  $\gamma$  sono assorbiti insieme ai raggi  $\alpha$  da uno schermo di alluminio di una grossezza data.

3° *Azione dei raggi  $\gamma$  con esclusione dei raggi  $\alpha$  e  $\beta$ .* Tre sono gli animali operati a questo fine, dei quali due morirono con sensibile ritardo sui controlli; uno dopo 9 e uno dopo 14 giorni dalla procurata infezione, mentre i rispettivi controlli morirono dopo 6 giorni.

Il terzo coniglio, invece, ebbe per due volte segni evidenti di malattia, in 7<sup>a</sup> ed in 16<sup>a</sup> giornata di esperimento, con forte diminuzione di peso,

(1) M. Rutherford e Miss Brooks, *Phil. Mag.*, juillet 1902.



aumento grande della eccitabilità, debolezza del treno posteriore; ma poco a poco si riebbe da questi attacchi, ed oggi vive in ottime condizioni di salute, dopo 40 giorni dalla subita operazione. Il controllo morì in 6 giorni.

Data quindi l'incostanza nei risultati ed il ritardo forte nella morte degli animali, ci venne il sospetto che in questi esperimenti i raggi  $\alpha$  e  $\beta$ , gli ultimi specialmente, una volta deviati dalla calamita, avessero a riversarsi ai lati dell'apparecchio e ad investire la testa dell'animale. In tal caso l'esclusione dei raggi  $\alpha$  e  $\beta$  sarebbe stata solo apparente; e siccome una parte solamente di questi raggi, quella che viene deviata con angolo maggiore, arriverebbe alla testa, così sarebbe facilmente spiegabile il risultato incompleto ottenuto.

A provare la verità di questo nostro sospetto, noi abbiamo istituiti altri esperimenti nei quali era assolutamente impedito ai raggi deviati di arrivare di nuovo a colpire il corpo dell'animale.

Questo abbiamo ottenuto proteggendo con un largo e grosso schermo di piombo a bordi rovesciati in alto, tutta la metà anteriore del corpo; la scatola col radio era sopra questo schermo in corrispondenza di un foro per il quale passavano i raggi  $\gamma$ , che venivano diretti sull'occhio dell'animale mediante un tubo di piombo di 1 cm. circa di lunghezza; la calamita veniva posta sopra lo schermo e abbracciante coi suoi poli la scatola col radio.

In questo caso i raggi  $\alpha$  e  $\beta$  deviati dalla calamita non arrivavano, anche dopo deviati, fino al corpo dell'animale, perchè trattenuti dallo schermo di piombo.

Un animale così trattato morì in 9 giorni, cioè poco dopo il controllo che morì in 6; mentre un altro coniglio trattato con lo stesso apparecchio, ma senza la calamita, quindi con tutti e tre i raggi riuniti,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , sopravvive in ottime condizioni di salute.

Da tutto questo si può concludere:

*Che i raggi  $\gamma$  non prendono alcuna parte, o una parte assolutamente minima, nella distruzione del virus rabido precedentemente iniettato nell'animale;*

*Che dei raggi  $\alpha$  e  $\beta$ , quelli che nella rabbia hanno un'azione predominante sono i raggi  $\beta$ , vale a dire i raggi catodici;*

*Che i raggi  $\alpha$ , o non esercitano alcuna influenza sul virus rabido, o vi esercitano una influenza del tutto secondaria, valendo semplicemente a rendere più completa l'azione di raggi  $\beta$  <sup>(1)</sup>.*

(1) Nella massima parte delle nostre esperienze in vitro, avendo usato una provetta di alluminio che era poggiata direttamente col suo fondo sull'apparecchio contenente il radio del valore di 100,000 U. R., dobbiamo ammettere che anche in queste la distruzione del virus rabido sia avvenuta senza l'influenza dei raggi  $\alpha$ , che dovevano essere assorbiti dalla stessa parete della provetta.



Tutto ciò naturalmente fu provato per esclusione, coi mezzi che oggi ci offre la fisica per la separazione dei vari raggi del radio. Rimane peraltro da esaminare con ulteriori ricerche se gli stessi risultati si possano ottenere anche in modo diretto, adoperando quei corpi, come il polonio, che emettono solo raggi  $\alpha$ , o usando i raggi X che si ottengono dai tubi di Crooks e che, come si sa, hanno grandissima analogia col gruppo dei raggi  $\gamma$ .

Passando *in secondo luogo a trattare del massimo tempo utile per la cura*, dobbiamo ricordare, dapprima, come sia difficile per la varia disposizione individuale stabilire esattamente, anche per il virus rabido fisso, l'epoca precisa in cui sarebbe dovuta avvenire la morte degli animali curati prendendo per norma quella dei controlli.

Nonostante, valendoci di un virus fisso che uccideva senza eccezione in sei giorni compiuti dal momento della praticata inoculazione, vale a dire in 7<sup>a</sup> giornata di esperimento, noi abbiamo trovato *che la guarigione dell'animale, non solo è possibile quando la cura col radio è cominciata dopo 2-3-4 giorni dalla provocata infezione, come è riferito in una nostra precedente comunicazione, ma anche dopo 5 giorni, ossia circa ai  $\frac{4}{5}$  dell'intera malattia.*

Naturalmente, quando noi diciamo i  $\frac{4}{5}$ , questo termine si riferisce solo al caso da noi esaminato, in cui la morte dei controlli avvenne in 6 giorni compiuti; nè è detto che lo stesso rapporto si mantenga inalterato per i casi in cui la malattia è più tumultuosa e la morte assai più rapida, avvenendo p. es. al 5° giorno dopo l'iniezione subdurale. Anzi è molto probabile che quanto più la malattia è breve, tanto più ristretto sia il tempo utile per la cura.

Non ci siamo poi creduti in dovere di ricercare questo termine anche in infezioni più gravi, fulminanti, perchè queste escono dai limiti di un ragionevole esperimento e troppo si allontanano da quanto nella pratica si riscontra nell'uomo.

A prova di quanto abbiamo affermato ci piace riferire la storia di due conigli in cui l'applicazione del radio sull'occhio ebbe principio 111 e 119 ore dalla procurata infezione, essendo morti i rispettivi controlli dopo 156 e 159 ore dalla iniezione subdurale.

Di questi due animali, il primo al 4° giorno di malattia si mostrava già sonnolento, presentava marcata rigidità del treno posteriore, diminuzione di peso (120 gr.), febbre a 40°,4. Il giorno successivo, quando s'iniziò la cura, i fenomeni nervosi predetti erano assai più accentuati; il peso diminuito ancora, la temperatura discesa a 39°,7.

Dopo la prima seduta curativa (12. h), la rigidità del treno posteriore era passata ad evidente paresi, che si dileguava intieramente dopo altre quattro sedute di radio, le prime tre di 6 ore ciascuna, la 4<sup>a</sup> di 4 ore, fatte rispettivamente in 6<sup>a</sup>, 7<sup>a</sup>, 8<sup>a</sup>, 9<sup>a</sup> giornata di malattia.



Intanto anche la sonnolenza e l'ostinata anoressia erano scomparse e l'animale aveva riacquisito il solito appetito e presentava l'ordinaria vivacità. Solo il peso seguì a diminuire per qualche giorno ancora, scendendo fino a gr. 1350, con una diminuzione di gr. 220 dal peso primitivo.

Nell'altro animale l'andamento della malattia e rispettivamente gli effetti della cura, furono gli stessi di quelli del caso precedente, solo che in questo, al momento della prima applicazione del rimedio, l'animale presentava già segni manifesti di eccitazione; aveva la coda eretta e stimolato correva pazzamente urtando spesso negli ostacoli; fenomeni questi che in altri animali nei quali esattamente si riprodussero, precedettero di poche ore la paralisi completa e la morte (36 h.).

Questo è il massimo effetto che noi abbiamo potuto ottenere col campione di radio di 100,000 U.R. di cui solamente disponiamo; *di avere, cioè, la guarigione circa ai  $\frac{4}{5}$  della malattia; e, quello che più monta, quando l'animale da oltre 24 ore presentava segni manifesti di rabbia.*

Non escludiamo, poi, che con campioni più potenti di radio non si possa andare anche più innanzi.

Peraltro dobbiamo rilevare che una tal possibilità di guarigione non potrà mai spingersi fino al periodo che precede immediatamente la morte; in cui debbono verificarsi alterazioni anatomiche sulle quali il radio non ha azione alcuna e che per loro stesse possono essere causa dell'esito letale. Anzi si può dire che è da queste alterazioni anatomiche, e dalla lentezza maggiore o minore nel regresso dei fenomeni che da esse più direttamente dipendono (assopimento, paresi, paralisi, diminuzione del peso corporeo), che si può giudicare, più che dal tempo in cui la cura è incominciata, della gravità del caso. E noi, infatti, abbiamo potuto osservare animali che trattati col radio a 3  $\frac{1}{2}$  giorni di malattia si sono mostrati assai più gravi di altri curati a 4-4  $\frac{1}{2}$  giorni, e più lento, più difficile è stato il regresso dei fenomeni.

*A complemento di queste ricerche abbiamo voluto esaminare se e quale diffusione del virus rabido fosse avvenuta nel sistema nervoso centrale al momento della cura; in modo particolare se l'infezione era passata dalla parte posteriore del cervello, dove l'iniezione del virus era stata praticata, all'altra parte ed al bulbo.*

A questo fine abbiamo infettato a destra, per trapanazione, e con lo stesso virus fisso che aveva servito per gli esperimenti precedenti, tre conigli dello stesso peso all'incirca; dopo trascorsi 3-4-5 giorni dalla procurata infezione li abbiamo uccisi per dissanguamento, e con la poltiglia fatta rispettivamente con la parte posteriore dell'emisfero opposto (sinistro), e negli ultimi due anche col bulbo, abbiamo infettato sotto la dura madre altrettanti conigli di piccola taglia, del peso medio di gr. 1200, avendo cura d'iniettare una discreta quantità di materiale (cc. 0,2 anziché cc. 0,1) della solita diluizione all'1-2 % di sistema nervoso preso dalle parti indicate.



I risultati di questi esperimenti sono stati i seguenti:

| Parte del sistema<br>nervoso provata  | Dopo<br>3 giorni | Dopo<br>4 giorni | Dopo<br>5 giorni | Morte<br>dei<br>Controlli |
|---------------------------------------|------------------|------------------|------------------|---------------------------|
| Parte posteriore<br>emisfero sinistro | + 7 giorni       | + 8 giorni       | + 11 giorni      | + 6 1/2 giorni            |
| Bulbo                                 | —                | + 7 giorni       | + 12 giorni      | + 6 1/2 giorni            |

Con questo si veniva a dimostrare, che *al momento della cura fatta 4-5 giorni dopo la praticata iniezione subdurale di virus fisso, questo, non solo si era diffuso da un emisfero all'altro, ma aveva invaso anche il bulbo*, dalla cui infezione derivano appunto nell'uomo i principali e più importanti fenomeni della malattia e la morte. Si confermava ancora che il grado d'infezione del bulbo, conseguentemente la rapidità della morte degli animali ai quali la poltiglia fatta con esso è stata iniettata, non è in diretto rapporto col giorno della malattia, verificandosi a questo riguardo qualche leggiera oscillazione individuale.

*Per ultimo abbiamo cercato di stabilire in modo preciso la dose minima necessaria per ottenere la guarigione quando si usa un campione di radio a potenza determinata, nel caso nostro di 100,000 U.R. (1).*

E questo abbiamo creduto opportuno rilevare, tanto per l'azione contemporanea del radio, quanto per la sua azione curativa, quando l'applicazione del rimedio era cominciata ad un periodo costante della malattia, circa alla metà del suo decorso, e più precisamente dopo 3 1/2 giorni dalla praticata inoculazione.

Ciò al fine di stabilire ancora il rapporto che passa fra la dose del rimedio ed i vari momenti della infezione.

#### 1.º Azione contemporanea.

| Durata della<br>applicazione<br>del rimedio | Risultati   | Morte<br>dei<br>Controlli |
|---------------------------------------------|-------------|---------------------------|
| 8 ore                                       | vive        | + 7 giorni                |
| 6 ore                                       | + 11 giorni | + 7 giorni                |
| 4 ore                                       | + 7 giorni  | + 7 giorni                |

(1) Noi ci riferiamo sempre al valore assoluto del radio quale fu dichiarato dall'unito certificato a firma Danysz, senza tener conto della diminuzione nella intensità delle radiazioni che deve necessariamente aversi per l'interposizione dello schermo di mica.

Indichiamo, poi, come di dose del rimedio, il rapporto fra l'intensità radio-attiva del campione usato e la durata della sua applicazione.



*Dunque la minima dose contemporanea di un campione di radio a 100,000 U.R. è di 8 ore; 6 ore dà un risultato incompleto; 4 ore non è nemmeno sentito e l'animale muore contemporaneamente al controllo.*

*2.º Azione curativa.*

| Durata della<br>applicazione<br>del rimedio | Risultati  | Morte<br>dei<br>Controlli |
|---------------------------------------------|------------|---------------------------|
| 24 ore                                      | vive       | + 7 giorni                |
| 18 ore                                      | vive       | + 7 giorni                |
| 12 ore                                      | + 7 giorni | + 7 giorni                |

*Quindi la dose minima curativa dello stesso campione a 3<sup>1</sup>/<sub>2</sub> giorni di malattia è di 18 ore; ossia tale dose è poco più che due volte superiore a quella necessaria per salvare l'animale quando il rimedio è usato subito dopo la procurata infezione.*

*Così si veniva anche a stabilire che la dose del rimedio non cresce proporzionalmente col crescere delle giornate di malattia.*

*Finalmente credemmo interessante esaminare se dai dati finora raccolti emerga qualche criterio, e quale, per stabilire la quantità di radio necessaria per guarire l'uomo dalla rabbia sviluppata.*

A questo riguardo è opportuno anzitutto ricordare quanto risulta dal complesso delle nostre esperienze sulla importanza della dose, essendo stato chiaramente dimostrato per tali esperienze che gli effetti benefici del radio sulla rabbia sono tanto più pronti e sicuri, tanto maggiore è il tempo utile per la cura, quanto più attivo è il campione che si usa, quanto più lunga è la durata della sua applicazione.

Quindi nella determinazione della dose per l'uomo noi ci troviamo di fronte a tre coefficienti, di cui uno è fisso, la massa del sistema nervoso da interessare, mentre due sono variabili a nostra volontà, cioè il tempo dell'applicazione del rimedio e l'intensità o forza della sorgente radio-attiva.

Ora, tenendo ferma anche per l'uomo la durata dell'applicazione del rimedio trovata sufficiente per gli animali, chè non sarebbe pratico nè prudente prolungarla oltre la misura indicata, rimane da determinare quale deve essere per l'uomo la potenza del campione di radio da usare in rapporto alla cresciuta massa del sistema nervoso che deve essere influenzata.

A questo proposito dobbiamo rilevare un fatto di molta importanza che ci fu dato osservare nei conigli normali trattati coll'applicazione del radio sull'occhio, cioè *che il cervello di questi animali acquista una radio-attività indotta, il cui grado varia con la durata del trattamento, e sta in*



*diretto rapporto con gli effetti che si ottengono per la stessa dose del rimedio nella cura della rabbia* <sup>(1)</sup>.

Così dopo un'applicazione del radio sull'occhio della durata di 8 ore, che abbiamo visto rappresentare la minima dose contemporanea, la sezione verticale del cervello fatta trasversalmente verso la sua metà, lascia sulla lastra fotografica involtata con carta nera e tenuta in camerino oscuro un'impronta molto marcata, che permette di riconoscere a prima vista l'organo fotografato. Invece, se si ripete lo stesso esperimento dopo 6 ore di applicazione del radio, che abbiamo visto dare sugli animali infettati sotto la dura madre con virus fisso risultato incompleto, con grande ritardo della loro morte, allora l'impronta del cervello sulla lastra è appena percettibile; e tale impronta manca del tutto se il radio viene tenuto in posto solo 4 ore, il tempo, cioè, che sappiamo dare nella rabbia effetti assolutamente nulli.

Da ciò ne emerge il fatto meraviglioso, *che la dose del rimedio necessaria per salvare il coniglio dalla rabbia può essere determinata fotograficamente*, potendo giudicarsi dal grado della radio-attività indotta nel cervello, rispettivamente dalla chiarezza della impronta che questo lascia sulla lastra fotografica, della efficacia o meno della sua azione curativa.

Stabilito questo fatto, e rilevata la sua importanza generale per la dimostrazione della radio-attività indotta di un organo interno, non staremo a discutere ora se tale radio-attività sia un fenomeno fondamentale, in relazione diretta con la guarigione della rabbia, o semplicemente un fenomeno concomitante. Quello che è certo si è, che passa un rapporto molto stretto fra la dose del rimedio usato, il grado di radio-attività del cervello e gli effetti della cura; quindi la sorgente di radiazioni necessaria per ottenere questi effetti deve stare in diretta relazione con la massa del sistema nervoso da interessare e con la durata di applicazione del radio.

Da ciò se ne può dedurre con facilità, che se 100,000 U.R. bastano per guarire il coniglio del peso di kg. 1.200-1.500 a malattia già sviluppata, *nelle stesse condizioni e per la stessa durata di applicazione del rimedio, occorrerà nell'uomo, in rapporto al cresciuto peso del corpo, una dose 60-80 volte superiore* <sup>(2)</sup>; o in altre parole, *un campione che in cifra tonda abbia un minimo di 4,000,000 U.R. ed un massimo di 6,000,000; quindi, prendendo la media, un campione di 5,000,000*; campione che aspettiamo ancora di possedere per passare dalle esperienze di laboratorio alle applicazioni pratiche sull'uomo <sup>(3)</sup>.

<sup>(1)</sup> Per non crearne una nuova, usiamo la parola radio-attività indotta, per quanto sappiamo che questa è adoprata più propriamente per denotare lo stesso fenomeno, ma determinato dalle emanazioni, anzichè dalle radiazioni, come nel caso presente.

<sup>(2)</sup> Per semplicità prendiamo per base del calcolo la differenza del peso del corpo, anzi che quella del sistema nervoso centrale.

<sup>(3)</sup> Siamo lieti di annunziare che per recente disposizione del Ministro della Pubblica Istruzione, abbiamo potuto ottenere i fondi occorrenti per l'acquisto di questo campione.



Tutto questo abbiamo voluto specificare, perchè se qualcuno avrà prima di noi i mezzi e l'opportunità di sperimentare sull'uomo, si ricordi che noi nelle nostre ricerche siamo arrivati a questo riguardo, oltre a dare alla cura della rabbia sviluppata una solida base sperimentale, a stabilire perfino la dose del rimedio, ossia la quantità di radio necessaria per la cura e la durata della sua applicazione.

Inoltre, dopo questi dati, è sperabile che in tali applicazioni non si abbiano a fare tentativi inutili con campioni di radio di forza assolutamente insufficiente, compromettendo così il metodo di ricerca da noi proposto; il quale, se usato nelle stesse condizioni rilevate dall'esperimento sul coniglio, potrà rendere nell'uomo immensi benefici. Non altrimenti avverrebbe se in una perniciosa si usasse una dose insufficiente di chinino, 50 ctgr. ad esempio, o se nella difterite s'iniettasse un siero di un valore curativo troppo basso, appena di 30-50 U.I. E nel caso del radio di cui è questione, non meno che negli altri ricordati, si commetterebbe un gravissimo errore se dell'insuccesso si volesse imputare il rimedio dichiarandolo destituito di qualsiasi potere curativo specifico, piuttosto che attribuire l'esito letale alla insufficienza della dose o a difetto nella potenza del medicamento usato.

**Geodesia.** — *Nuove determinazioni di gravità relativa in Sicilia.* Nota<sup>(1)</sup> del Corrispondente A. VENTURI.

#### Compensazione delle durate di oscillazione.

Nella citata mia Memoria sulla gravità in Sicilia, dissi le ragioni per cui stimo conveniente di procedere alla compensazione delle durate di oscillazione: così la ricerca dell'error medio di ogni gravità in base a condizioni assolute, che sussistono fra le durate di oscillazione dei pendoli, viene istituita su un criterio rigoroso. Rimandando all'apposita Memoria, sopra citata, mi limito a riportare qui gli elementi del calcolo relativo.

#### *Residui di osservazione* <sup>(2)</sup>

| $i$ | $w_i$ | $i$ | $w_i$  | $i$ | $w_i$  | $i$ | $w_i$ | $i$ | $w_i$ |
|-----|-------|-----|--------|-----|--------|-----|-------|-----|-------|
| 1   | — 7,0 | 4   | — 9,1  | 7   | + 14,0 | 10  | 0,0   | 13  | — 2,2 |
| 2   | + 3,1 | 5   | — 6,2  | 8   | + 13,1 | 11  | + 4,0 | 14  | 0,0   |
| 3   | 0,0   | 6   | — 16,0 | 9   | + 15,2 | 12  | — 4,0 | 15  | + 9,3 |

che sono, come tutti gli elementi che seguono, espressi in unità della 7<sup>a</sup> de-

<sup>(1)</sup> V. pag. 265.

<sup>(2)</sup> *Sulla compensaz. ecc.*, pag. 4.

cimale. La tavola che segue, dà le ausiliarie  $w_{rs}$ : le colonne si riferiscono ai primi indici, le linee ai secondi.

*Valori delle  $w_{r,s}$  (1).*

|   | 1     |   | 2      |   | 3      |   | 4      |   | 5     |
|---|-------|---|--------|---|--------|---|--------|---|-------|
| 1 | — 7,0 | 1 | — 12,5 | 1 | + 5,6  | 1 | + 4,2  | 1 | + 1,4 |
| 2 | + 3,1 | 2 | — 4,5  | 2 | + 10,0 | 2 | + 11,5 | 2 | + 9,2 |
| 3 | 0,0   | 3 | — 16,0 | 3 | + 4,3  | 3 | — 0,8  | 3 | + 8,4 |

Da queste si dedussero le risolventi  $v, V$ , da cui dipendono le correzioni delle oscillazioni:

*Valori delle  $v, V$  (2).*

| $i$ | $v_i$ | $V_i$  | $i$ | $v_i$  | $V_i$  | $i$ | $v_i$ | $V_i$  | $i$ | $v_i$ | $V_i$  | $i$ | $v_i$ | $V_i$ |
|-----|-------|--------|-----|--------|--------|-----|-------|--------|-----|-------|--------|-----|-------|-------|
| 1   | — 7,0 | — 10,5 | 4   | — 12,6 | — 5,1  | 7   | + 5,6 | + 9,9  | 10  | + 4,2 | + 5,4  | 13  | + 1,4 | + 1,4 |
| 2   | + 7,5 | + 18,9 | 5   | + 1,7  | + 16,9 | 8   | + 7,2 | + 20,3 | 11  | + 9,4 | + 16,4 | 14  | + 8,5 | + 8,5 |
| 3   | + 1,3 | — 6,7  | 6   | — 10,3 | — 12,2 | 9   | — 0,9 | — 2,5  | 12  | — 6,0 | — 2,0  | 15  | + 4,9 | + 4,9 |

*Correzioni delle durate di oscillazione  
in unità della settima decimale (3).*

| Pend. | Palermo | Corleone | Vicareto | Castrogiovanni | Caltanissetta | Termini Im. |
|-------|---------|----------|----------|----------------|---------------|-------------|
| 116   | + 0,60  | — 0,64   | — 16,67  | + 4,44         | + 4,20        | + 8,07      |
| 117   | — 9,80  | + 2,96   | + 5,19   | — 1,98         | — 2,06        | + 5,69      |
| 118   | + 14,30 | + 4,78   | + 2,16   | — 2,94         | — 10,75       | — 7,55      |
| 119   | — 5,10  | — 7,10   | — 9,41   | + 0,39         | + 8,62        | — 6,22      |

*Valori corretti delle durate di oscillazione.*

| Pend. | Palermo                | Corleone               | Vicareto               | Castrogiovanni         | Caltanissetta          | Termini Im.            |
|-------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 116   | <sup>s</sup> 0,5062924 | <sup>s</sup> 0,5063416 | <sup>s</sup> 0,5063683 | <sup>s</sup> 0,5063878 | <sup>s</sup> 0,5063741 | <sup>s</sup> 0,5062991 |
| 117   | 70041                  | 70535                  | 70702                  | 70996                  | 70861                  | 70109                  |
| 118   | 72142                  | 72620                  | 72788                  | 73083                  | 72948                  | 72194                  |
| 119   | 71841                  | 72333                  | 72511                  | 72810                  | 72673                  | 71919                  |

(1) Sulla compensaz. ecc., p. 9.

(2) Ibid, pag. 9-11.

(3) Ib. pag. 11.



Come controllo di tutto il calcolo, si determinarono le  $w$  per mezzo di questi ultimi valori; esse  $w$  debbono ridursi sensibilmente a zero. Si ebbe infatti:

*Valori di  $w$  dopo la compensazione.*

| $i$ | $w_i$ | $i$ | $w_i$ | $i$ | $w_i$ | $i$ | $w_i$ | $i$ | $w_i$ |
|-----|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|-----|-------|
| 1   | + 0,7 | 4   | + 0,2 | 7   | + 0,1 | 10  | — 0,4 | 13  | 0,0   |
| 2   | + 0,8 | 5   | + 0,9 | 8   | — 0,3 | 11  | + 0,2 | 14  | — 0,3 |
| 3   | — 0,4 | 6   | + 0,6 | 9   | — 0,2 | 12  | + 0,3 | 15  | — 0,4 |

e la 7<sup>a</sup> decimale di questi residui è nulla: il che prova l'esattezza del calcolo.

Colla formula (22), pag. 12 di detta Memoria, fu calcolato l'error medio unitario  $\varepsilon$  che compete a queste determinazioni di durata di oscillazione di ciascun pendolo. Si trovò

$$\varepsilon = 0,0000008.8$$

e per l'error medio  $E$  a temersi sopra ciascun pendolo compensato, il quale nel caso nostro è dato dalla formula <sup>(1)</sup>

$$E = \varepsilon \sqrt{\frac{3}{8}}$$

risultò

$$E = 0,0000005.4$$

certamente molto piccolo e rassicurante circa l'esattezza delle osservazioni.

Deduzione dei valori della gravità nelle singole stazioni.

Assumendo per la gravità a Palermo (Martorana) il valore già altra volta determinato:

$$g = 9^m,80090$$

nel luogo ove sempre si son fatti oscillare i pendoli, si determineranno le gravità nelle diverse stazioni, adoperando i valori compensati delle durate di oscillazione di *uno qualunque* dei quattro pendoli, valori riportati nella antiprecedente tavoletta; poichè ciascuno dei detti pendoli, essendo intervenuta la compensazione, conduce all'identico risultato, per la formula

$$g_r = g_p \frac{s_p^2}{s_r^2}$$

<sup>(1)</sup> Cfr. loc. cit., pag. 14.

essendo  $g_r$  la gravità nella stazione *mesima*; ed  $s_p, s_r$  le durate di oscillazione di uno stesso pendolo in Palermo e nella stazione considerata <sup>(1)</sup>. Si ebbero i seguenti risultati, per la località di ciascuna stazione:

|                          |                 |
|--------------------------|-----------------|
| Corleone . . . . .       | $g = 9,79901^m$ |
| Vicareto . . . . .       | $g = 9,79835$   |
| Castrogiovanni . . . . . | $g = 9,79723$   |
| Caltanissetta . . . . .  | $g = 9,79773$   |
| Termini . . . . .        | $g = 9,80064$   |

Le relative riduzioni al livello del mare, tenendo presenti le altitudini adottate e riportate in ciascuna stazione, sono, dicendo  $g_0$  la gravità ridotta al detto livello:

| $g_0 - g$ |          |                |               |         |
|-----------|----------|----------------|---------------|---------|
| Corleone  | Vicareto | Castrogiovanni | Caltanissetta | Termini |
| + 193     | + 167    | + 278          | + 172         | + 8     |

in unità della 5<sup>a</sup> decimale del metro. Con questi valori, e colle tavole di Triulzi, si calcolarono le correzioni dovute alle masse, dal livello del mare in sopra, in un raggio di 15 chilometri attorno alla stazione. Fu usata la formula

$$g'' - g_0 = \frac{3}{5} \frac{\theta}{\theta_m} (g - g_0) + \text{riduzione topografica,}$$

ove  $\theta$  è la densità del terreno ove giace la stazione, e  $\theta_m = 5,6$  è la densità media della Terra. Si ebbero così:

*Valori di  $g'' - g_0$*

|                                                   | Corleone | Vicareto | Castrogiovanni | Caltanissetta | Termini |
|---------------------------------------------------|----------|----------|----------------|---------------|---------|
| $\frac{3}{4} \frac{\theta}{\theta_m} (g - g_0) =$ | - 64,6   | - 49,0   | - 68,6         | - 59,7        | - 2,7   |
| Rid. top. =                                       | + 6,2    | + 6,2    | + 7,4          | + 7,7         | + 1,7   |
|                                                   | - 58,4   |          | - 43,0         |               | - 1,0   |
|                                                   |          |          | 61,2           | - 50,2        |         |

sempre in unità della 5<sup>a</sup> decimale del metro.

<sup>(1)</sup> Il valore di  $g_p$  è quello già determinato nella prima campagna del 1899, e riferito a Vienna. L'illustre prof. Lorenzoni ha gentilmente aderito a fare oscillare i nostri pendoli a Padova, onde fornirmi il modo di controllare, per mezzo di Padova, il valore di  $g_p$ . A suo tempo darò conto del risultato.



Infine pel calcolo delle gravità teoriche fu usata la recente formula di Helmert del 1901. Esse sono indicate abitualmente col simbolo  $\gamma_0$ , perchè son relative al livello del mare. Riunendo, ora, in un solo specchietto tutti i risultati di questa campagna, ricordiamo che  $g$  indica la gravità come determinata nelle località delle stazioni: che  $g_0$  è la stessa ridotta al livello del mare: che  $g''_0$  è la medesima, oltre che ridotta al livello del mare, liberata anche dall'azione delle masse di terreno, dal livello del mare in sopra per un raggio di 15 km. attorno alla stazione; che infine  $\gamma_0$  è la gravità teorica, nelle stesse condizioni. L'anomalia di gravità è la differenza  $g''_0 - \gamma_0$ : e vien data nell'ultima colonna dello specchietto.

*Valori delle gravità.*

| Stazione                                    | $g$           | $g_0$         | $g''_0$       | $\gamma_0$    | Anomalia      |
|---------------------------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
|                                             | <sup>cm</sup> | <sup>cm</sup> | <sup>cm</sup> | <sup>cm</sup> | <sup>cm</sup> |
| Corleone . . . . .                          | 979.901       | 980.094       | 980.036       | 979.977       | + 0,059       |
| Vicareto . . . . .                          | 979.835       | 980.002       | 979.959       | 979.977       | — 18          |
| Castrogiovanni . .                          | 979.723       | 980.001       | 979.938       | 979.965       | — 27          |
| Caltanissetta. . .                          | 979.773       | 979.945       | 979.894       | 979.961       | — 67          |
| Termini . . . . .                           | 980 064       | 980.072       | 980.071       | 980.003       | + 68          |
| Palermo . . . . .<br>(staz. di riferimento) | 980.090       | 980.096       | 980.095       | 980.015       | + 80          |

L'error medio che compete a questi valori delle gravità, è dato, secondo la sopracitata Memoria, dalla formula:

$$M_g = 27,5 \frac{E}{S} \quad (1)$$

essendo  $E$  l'error medio di oscillazione sopra riportato, ed  $S$  il valor medio delle durate delle varie oscillazioni. Si ebbe, allora

$$M_g = 0^m,00002.9$$

che, come si vede, è piccolissima e garentisce dell'esattezza dei risultati.

Riportiamo ora qui uno specchio complessivo dei risultati gravimetrici di questa e dell'altra campagna del 1899-900, giacchè allora le gravità teoriche si calcolarono colla formula del 1894, e le anomalie non sarebbero

(1) V. *Sulla compensaz. ecc.*, pag. 16.

comparabili con queste sopra riportate. Usando anche pel 1899-00 della formula teorica 1901, e riunendo tutto, si ha:

| Anno    | Stazione           | $g$                   | $g_0$                 | $g_0''$               | $\gamma_0$            | Anomalia              |
|---------|--------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1899    | Ustica. . . . .    | <sup>cm</sup> 979.147 | <sup>cm</sup> 980.224 | <sup>cm</sup> 980.201 | <sup>cm</sup> 980.067 | + <sup>cm</sup> 0.134 |
| "       | Favignana . . .    | 980.102               | 104                   | 104                   | 979.999               | + 105                 |
| "       | Pantelleria . . .  | 979.950               | 025                   | 006                   | 979.902               | + 104                 |
| "       | Trapani. . . . .   | 980.097               | 098                   | 098                   | 980.006               | + 92                  |
| 1899-04 | Palermo . . . . .  | 090                   | 096                   | 095                   | 015                   | + 80                  |
| 1900    | Valverde . . . . . | 075                   | 094                   | 089                   | 014                   | + 75                  |
| 1904    | Termini. . . . .   | 064                   | 072                   | 071                   | 003                   | + 68                  |
| "       | Corleone . . . . . | 979.901               | 094                   | 036                   | 979.977               | + 59                  |
| "       | Vicareto . . . . . | 835                   | 002                   | 979.959               | 977                   | — 18                  |
| "       | Castrogiovanni .   | 723                   | 001                   | 938                   | 965                   | — 27                  |
| "       | Caltanissetta. .   | 773                   | 979.945               | 894                   | 961                   | — 67                  |

Non è ancor tempo di istituire una vera discussione su questi risultati, messi anche in raffronto con quelli ottenuti nella regione orientale dell'Isola dal ch.<sup>mo</sup> prof. Riccò, perchè non ancora abbiamo nozioni sulla gravità lungo la costa meridionale, mercè cui tutta l'Isola verrà ad essere gravimetricamente esplorata sia nel suo circuito, sia nel suo centro. Tali studi lungo la costa sud, saranno intrapresi questo anno medesimo, sempre coll'appoggio della R. Commissione geodetica; e dopo di essi, si potrà istituire un sistema sufficientemente determinato di curve isanomale in Sicilia. Però sin da ora si può fare qualche osservazione.

Sapendo che l'anomalia all'Etna fu dal prof. Riccò determinata in — 0<sup>cm</sup>,013 <sup>(1)</sup> si vede come nella regione sottostante al centro dell'Isola vi sia un difetto di gravità più cospicuo che sotto l'Etna. Si noti che il detto centro è un distretto eminentemente disseminato di miniere di solfo. Inoltre, accoppiando le mie misure con quelle già citate della regione orientale <sup>(1)</sup>, si possono schizzare le *parti settentrionali* delle curve isanomale, per quanto rudimentalmente si vogliano considerare; ma notevole è la successione progressiva di esse. La curva settentrionale più esterna è tutta marina, congiunge quasi esattamente Ustica con Lipari; la seconda, più interna, ha il suo decorso fra Pantelleria, Favignana, Messina; la 3<sup>a</sup> che si stende dentro

<sup>(1)</sup> V. Comptes-rendus de la XIV<sup>e</sup> Conférence générale de l'Ass. Géod. intern. 1905, pag. 203.



la seconda, corre fra Trapani e Taormina, all'incirca; la 4<sup>a</sup> è quella di Palermo, che va a perdersi nei dintorni dell'Etna verso Milo e Nicolosi; la 5<sup>a</sup>, sempre più interna, da Termini accenna a Randazzo; la 6<sup>a</sup> tende a legare, entro alla 5<sup>a</sup>, Corleone con Paternò. Infine restano i tre punti centralissimi dell'Isola, Vicareto, Castrogiovanni e Caltanissetta, dei quali i primi due possono lasciarci sbizzare una settima curva interna che passa frammezzo ad essi: Caltanissetta resta isolata, col minimo valore d'anomalia sinora determinato in Sicilia. Si ha dunque un vero gradiente gravimetrico col centro (minimo) a Caltanissetta, e che avvolge tutta la parte centrale e settentrionale dell'Isola, stendendosi sino ad Ustica e a Lipari, estreme stazioni possibili rispetto alla Sicilia verso Nord, a non contare Stromboli che pare faccia sistema col continente. Sarà interessante vedere come si comporta questo gradiente verso Sud; ma in attesa di ciò, mi piace concludere osservando che attorno all'Etna, e col minimo alla vetta, esiste un altro gradiente locale caratteristico del gran Vulcano, che ha una curiosa analogia col gradiente generale di cui sopra ho sbizzato l'andamento. Dall'Osservatorio Etneo a quello di Catania, abbiamo la stessa anomalia relativa <sup>(1)</sup>, che tra Caltanissetta e Palermo, con distanza cinque volte maggiore, ma con un dislivello cinque volte minore all'incirca. Questa circostanza dipende da cause fortuite, o è l'esponente di qualche correlazione fra la distribuzione delle masse sotto il vulcano, e quella relativa all'intera Isola? ... Ai nuovi studi il chiarire, se pur sia possibile, simili interessanti risultati.

**Matematica.** — *Sulle coppie di varietà geodeticamente applicabili.* Nota di GUIDO FUBINI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

1. Continuo lo studio iniziato nella Nota pubblicata con lo stesso titolo in questi Rendiconti (18 giugno 1905). Generalizzerò la ricerca alle varietà a più di tre dimensioni, limitandomi qui al caso più simmetrico e interessante delle varietà V (di Levi-Civita), il cui elemento lineare è del tipo:

$$(1) \quad ds^2 = \sum_{i=1}^n [\Pi'_j(\psi_i - \psi_j)] dx_i^2$$

dove le  $x_i$  sono le coordinate correnti,  $\psi_i$  è funzione delle  $x_i$  (eventualmente costante),  $\Pi'_j$  indica che  $j$  percorre tutti i valori, eccetto  $j = i$ . Tutte le  $\psi$  sono distinte, perchè si suppone (1) non degenerare. Indicheremo, come nella prima Nota, con  $y_i$  un nuovo sistema di variabili, tali che l'elemento (1),

(1) V. Riccò, *Determinazione di gravità relative in 43 luoghi*, ecc. Spettroscopisti, vol. XXXII.

espresso per mezzo di esse, è ancora dello stesso tipo  $\sum_{i=1}^n [\Pi'_i(\varphi_i - \varphi_j)] dy_i^2$ , dove  $\varphi_i$  è funzione della sola  $y_i$ . Con  $I$  indico l'Iacobiano delle  $x$  rispetto alle  $y$ ; con  $\binom{i}{j}, \binom{ij}{lm}, \binom{ijl}{mnp}$  ecc. indico i suoi minori  $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}, \frac{\partial(x_i x_j)}{\partial(y_l y_m)}, \frac{\partial(x_i x_j x_l)}{\partial(y_m y_p y_q)}$  ecc. Con  $C_{lm}^{ij}$  indico il complemento algebrico in  $I$  di  $\binom{ij}{lm}$ . Indicando con  $(il, mp), (il, mp)_y$  i simboli di Riemann di prima specie relativi ai due elementi lineari, si ha che essi sono tutti nulli, eccetto quelli del tipo  $(il, il) = -(li, il), (i \neq l), (il, il)_y = -(li, il)_y$ , e che quindi:

$$(2) \quad (il, pq)_y = \sum_{rs} (rs, rs) \binom{rs}{il} \binom{rs}{pq}.$$

Con  $[ij]$  indicherò la curvatura  $\frac{(ij, ij)}{a_{ii} a_{jj}}, (i \neq j)$ ; con  $[ijk]$  indicherò l'espressione:  $\frac{[ij] - [ik]}{\psi_j - \psi_k} (i \neq j \neq k \neq i)$  e infine con  $[ijhk]$  indico l'espressione:  $\frac{[ijh] - [ijk]}{\psi_h - \psi_k}$ , se gli indici  $i, j, h, k$  sono tutti distinti.

2. Lemma I. — Hanno luogo le seguenti identità:

$$(3) \quad \frac{[ij]}{(\psi_k - \psi_i)(\psi_k - \psi_j)} + \frac{[jk]}{(\psi_i - \psi_j)(\psi_i - \psi_k)} + \frac{[ki]}{(\psi_j - \psi_k)(\psi_j - \psi_i)} = 0$$

$$(4) \quad (\psi_i - \psi_j)[kij] + (\psi_j - \psi_i)[kjl] + (\psi_i - \psi_i)[kli] = 0$$

$$(5) \quad \frac{\partial [ij]}{\partial x_k} = \psi'_k [ijk]$$

$$(6) \quad \frac{\partial [ijk]}{\partial x_l} = \psi'_l [ijkl]$$

se gli indici  $i, j, k, l$  sono tutti distinti. Le espressioni  $[ijk], [ijkl]$  sono rispettivamente simmetriche negli indici  $i, j, k$  e  $i, j, k, l$ .

La (4) si verifica tosto, ricordando che  $(\psi_i - \psi_j)[kij] = [ki] - [kj]$  ecc.

Le (5), (6) si verificano col calcolo effettivo.



Dalle (3), (4) scende subito l'ultima parte del precedente teorema (1).

Lemma II. — *Condizione necessaria e sufficiente, affinché l'elemento (1) sia a curvatura costante, è che tutti i simboli  $[ijk]$  siano nulli.*

Infatti, se lo spazio è a curvatura costante in ogni singolo punto, è sempre  $[ij] = [ik]$ , ossia  $[ijk] = 0$ . Viceversa, se tutti i simboli  $[ijk]$  sono nulli, lo spazio è a curvatura costante in ogni singolo punto. E questa curvatura è poi una costante effettiva (come risulta in generale da un teorema di Schur) o come si deduce dalle (5), che ne dimostrano identicamente nulle le derivate prime.

3. Ora (Nota 1<sup>a</sup>, § 3) noi possiamo senz'altro trascurare il caso di varietà a curvatura costante, ossia (lemma II) potremo ammettere che almeno uno dei simboli  $[ijk]$  sia diverso da zero. Vale in tal caso il seguente

Teorema fondamentale. *Se (1) non è a curvatura costante, esiste almeno un indice  $l$ , tale che tutti i simboli  $[ijk]$ , per cui uno degli indici  $i, j, k$  è uguale a  $l$ , sono senza eccezione diversi da zero.*

Infatti, se tutti i simboli  $[ijk]$  sono differenti da zero, allora ognuno degli indici  $1, 2, \dots, n$  si può assumere come indice  $l$ . Sia invece p. es.  $[123] = 0$ ; indicheremo con  $1, 2, 3, \dots, t$  tutti gli indici tali che  $[ijk] = 0$  per  $i \leq t, k \leq t, j \leq t$ . Poichè non tutti i simboli  $[pqr]$  sono nulli, sarà  $t < n$ ; ma certamente è  $t \geq 3$ .

(1) Si trova che

$$\begin{aligned}
 [12] &= \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\psi_1''}{\psi_1 - \psi_2} \frac{1}{a_{11}} + \frac{1}{4} \frac{\psi_1'^2}{\psi_1 - \psi_2} \frac{1}{a_{11}} \left[ \frac{1}{\psi_1 - \psi_2} + \sum_l' \frac{1}{\psi_1 - \psi_l} \right] \right\}_{rot(1,2)} \\
 &\quad - \frac{1}{4} \sum_3^n \frac{\psi_i'^2}{a_{ii}} \frac{1}{(\psi_i - \psi_1)(\psi_i - \psi_2)} \\
 [123] &= \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\psi_1''}{a_{11}(\psi_1 - \psi_2)(\psi_1 - \psi_3)} + \frac{1}{4} \frac{\psi_1'^2}{a_{11}} \frac{1}{(\psi_1 - \psi_2)(\psi_1 - \psi_3)} \times \right. \\
 &\quad \times \left[ \frac{1}{\psi_1 - \psi_2} + \frac{1}{\psi_1 - \psi_3} + \sum_l' \frac{1}{\psi_1 - \psi_l} \right] \Big\}_{rot(1,2,3)} \\
 &\quad - \frac{1}{4} \sum_4^n \frac{\psi_i'^2}{a_{ii}} \frac{1}{(\psi_i - \psi_1)(\psi_i - \psi_2)(\psi_i - \psi_3)} \\
 [1234] &= \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\psi_1''}{a_{11}(\psi_1 - \psi_2)(\psi_1 - \psi_3)(\psi_1 - \psi_4)} + \frac{1}{4} \frac{\psi_1'^2}{a_{11}} \frac{1}{(\psi_1 - \psi_2)(\psi_1 - \psi_3)(\psi_1 - \psi_4)} \times \right. \\
 &\quad \times \left[ \frac{1}{\psi_1 - \psi_2} + \frac{1}{\psi_1 - \psi_3} + \frac{1}{\psi_1 - \psi_4} + \sum_l' \frac{1}{\psi_1 - \psi_l} \right] \Big\}_{rot(1,2,3,4)} \\
 &\quad - \frac{1}{4} \sum_5^n \frac{\psi_i'^2}{a_{ii}} \frac{1}{(\psi_i - \psi_2)(\psi_i - \psi_3)(\psi_i - \psi_4)(\psi_i - \psi_1)} \text{ e analoghe}
 \end{aligned}$$

dove  $\sum_l' \frac{1}{\psi_1 - \psi_l}$  indica che  $l$  percorre tutti i valori  $(1, 2, \dots, n)$  eccetto il valore  $l=1$ , e dove  $\{\dots\}_{rot(1,\dots)}$  indica la somma dell'espressione tra  $\{\}$  e delle analoghe, che si ottengono, rotando gli indici  $1, \dots$

In primo luogo io dico che  $\psi_h$  (per  $h > t$ ) è costante; basterà dimostrare che, se  $\psi_h \neq \text{cost}$ , allora  $[ijh] = 0$  (per  $i \leq t, j \leq t, i \neq j$ ). Infatti sia  $k \leq t, k \neq i, k \neq j$ . Sarà  $[kij] = 0$  e quindi  $\frac{\partial [kij]}{\partial x_h} = \psi'_h [kijh] = 0$ ; e, poichè  $\psi'_h \neq 0$ , sarà  $[kijh] = 0$ , ossia  $[kij] - [hij] = 0$ ; ma, poichè  $[kij] = 0$ , sarà pure  $[hij] = 0$ . Tutte le  $\psi$ , non uguali a una costante, hanno perciò un indice non maggiore di  $t$ ; e noi le potremo quindi indicare con  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_d$ , dove  $d \leq t$  <sup>(1)</sup>. Io dico ora che *tutti i simboli*  $[pqr]$ , per cui anche uno solo degli indici  $p, q, r$  sia maggiore di  $t$ , sono differenti da zero. Infatti sia  $i \leq t, j \leq t, h > t, m \leq d$  ( $i \neq j \neq m \neq i$ ). Sarà, poichè  $[mij] = 0$ , per (6):

$$\frac{\partial [ijh]}{\partial x_m} = \psi'_m [hmji] = \frac{\psi'_m}{\psi_m - \psi_h} \{ [ijm] - [ijh] \} = - \frac{\psi'_m}{\psi_m - \psi_h} [ijh].$$

Scrivendo questa uguaglianza per tutti i valori di  $m$  ( $\leq d$ ) distinti da  $i, j$ , otterremo, integrando e indicando con  $\beta_{hij}$  una funzione di  $x_i, x_j$ :

$$[ijh] = \frac{\beta_{hij}}{(\psi_h - \psi_1)(\psi_h - \psi_2) \dots (\psi_h - \psi_d)} : (h > t, j \leq t, j \leq t).$$

Indicando con  $\alpha_{hij}$  una nuova funzione di  $x_i, x_j$ , possiamo scrivere questa equazione nel modo seguente:

$$[ijh] = \frac{\alpha_{hij}}{a_{hh}(\psi_h - \psi_i)(\psi_h - \psi_j)}$$

e analoghe <sup>(2)</sup>.

Sia ora  $k \leq t, k \neq i, k \neq j$ . Dalla (4) si trae che tra i simboli  $[hij], [hjk], [ijk]$  esiste un'identità, che per le formule precedenti e per la  $[ijk] = 0$ , diventa:  $\alpha_{hij} - \alpha_{hjk} = 0$ . Da questa uguaglianza si deduce che tutte le  $\alpha_{hij}$  sono uguali a una stessa quantità  $\alpha_h$  dipendente solo dall'indice  $h$ . Poichè poi  $\alpha_h = \alpha_{hij}$  si trova che  $\alpha_h$  è indipendente da  $x_k$  e quindi, per simmetria, anche da  $x_i, x_j$ . Ma, poichè  $\alpha_h = \alpha_{hij}$  è funzione soltanto di  $x_i, x_j$ , avremo che  $\alpha_h$  è una costante.

Poichè poi non tutti i simboli  $[hij]$  ( $i \leq t, j \leq t, i \neq j$ ) sono nulli, sarà certamente  $\alpha_h = \text{cost} \neq 0$  e quindi *tutti i simboli*  $[hij]$  ( $i \leq t, i < t, i \neq j$ ) sono diversi da zero. Ricordo ora che (se, c. s.,  $m \leq d, i \leq t, i \neq m, h > t$ ) per le (5):

$$\frac{\partial [ih]}{\partial x_m} = \psi'_m [him] = \frac{\alpha_h \psi'_m}{a_{hh}(\psi_h - \psi_i)(\psi_h - \psi_m)}.$$

<sup>(1)</sup> Ricordo che esiste certamente qualche  $\psi$  non costante; altrimenti lo spazio sarebbe a curvatura costante (nulla): ciò, che abbiamo escluso.

<sup>(2)</sup> Ricordo che  $[ijh]$  non dipende da  $x_s$ , se  $\psi_s = \text{cost}$ : altrettanto avviene quindi di  $\alpha_{hij}$  (anche se  $s = i$ , oppure  $s = j$ ). In ogni caso è poi  $\alpha_{hij} = \alpha_{hji}$ , poichè  $[hij] = [hji]$ .



Scrivendo questa equazione per tutti i valori di  $m$  ( $m \leq d; m \neq i$ ) si trova, integrando:

$$[ih] = \frac{\alpha_h}{a_{hh}(\psi_h - \psi_i)} + \lambda_{ih}$$

dove  $\lambda_{ih}$  è funzione al massimo di  $x_i$ .

Valgono poi equazioni analoghe al variare di  $i$  ( $i \leq t$ ) e di  $h$  ( $h > t$ ). Ricordiamo ora che (se  $j \leq t$  è  $[ih] - [ji] = (\psi_h - \psi_j)[hij]$ ). Ricordando i valori di  $[ih]$ ,  $[hij]$ , si trova che  $\lambda_{ih} = [ij]$  e quindi anche  $\lambda_{jh} = [ij]$ . Tutte le quantità  $\lambda_{ih}$  ( $i \leq t$ ) sono perciò uguali fra di loro; e poichè  $\lambda_{ih}$  e  $\lambda_{jh}$  (quantità uguali) non dipendono che da  $x_i(x_j)$ , tutte le  $\lambda_{ih}$  saranno uguali a una stessa costante  $\lambda_h$ . Così pure tutti i simboli  $[ij]$  ( $i \leq t, j \leq t, i \neq j$ ) sono pure uguali a questa quantità  $\lambda_h$ , che è perciò indipendente dall'indice  $h$ , e che noi potremo senz'altro indicare con  $\lambda$ . In definitiva è dunque

$$(7) \quad [ij] = \lambda \quad (\lambda = \text{cost}) \quad (i \leq t, j \leq t); [ih] = \frac{\alpha_h}{a_{hh}(\psi_h - \psi_i)} + \lambda$$

$$(\alpha_h = \text{cost} \neq 0)$$

Ora è facile vedere che *anche tutti i simboli*  $[h\kappa j]$  ( $h > t, \kappa > t, j \leq t$ ) *sono differenti da zero*. Se p. e. fosse  $[h\kappa j] = 0$ , sarebbe  $[j\kappa] = [jh]$ , ossia per (7)  $\alpha_h a_{\kappa\kappa}(\psi_\kappa - \psi_j) = \alpha_\kappa a_{hh}(\psi_h - \psi_j)$ : ciò che è assurdo, perchè  $\alpha_h \neq 0$ ,  $\alpha_\kappa \neq 0$  ( $\alpha_h = \text{cost}$ ,  $\alpha_\kappa = \text{cost}$ ),  $\psi_m$  ( $m \leq d$ ) dipende solo da  $x_m$ , e almeno una delle  $\psi_m$  non è costante. Così pure *anche tutti i simboli*  $[h\kappa\chi]$  ( $h > t, \kappa > t, \chi > t$ ) ( $h \neq \kappa \neq \chi \neq h$ ) *sono differenti da zero*. Se p. es. fosse  $[h\kappa\chi] = 0$ , sarebbe  $[h\kappa] = [h\chi]$ . Ora dall'identità (cfr. la (3)) tra  $[ih]$ ,  $[i\kappa]$ ,  $[h\kappa]$  ( $i \leq t$ ) si deduce  $[h\kappa]$  in funzione di  $[hi]$ ,  $[i\kappa]$ ; e, per le (7), si trova:

$$[h\kappa] = \frac{1}{\psi_\kappa - \psi_h} \left[ \frac{\alpha_\kappa}{a_{\kappa\kappa}} - \frac{\alpha_h}{a_{hh}} \right].$$

Formula analoga vale per  $[h\chi]$ . Se dunque fosse  $[h\kappa] = [h\chi]$ , sarebbe:

$$\frac{\alpha_h}{a_{hh}} (\psi_\kappa - \psi_h) + \frac{\alpha_\kappa}{a_{\kappa\kappa}} (\psi_h - \psi_\kappa) + \frac{\alpha_\chi}{a_{\chi\chi}} (\psi_\kappa - \psi_h) = 0$$

equazione assurda per le ragioni dette più sopra. In conclusione: *tutti i simboli*  $[pqr]$ , *per cui anche uno solo degli indici*  $p, q, r$  *è maggiore di*  $t$ , *sono differenti da zero*. Basta dunque scegliere  $l$  in guisa che  $n \leq l$ ,  $l > t$ , perchè sia dimostrato il nostro teorema iniziale.

4. Premesso questo, daremo una formula essenziale al nostro scopo. Per noti teoremi sui determinanti è identicamente (vedi § 1)

$$\sum_{i,k} \begin{pmatrix} i & k \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} C_{rs}^{ik} = 0 \quad (\alpha, \beta, r, s = 1, 2, \dots, n; \alpha < \beta; r < s; \alpha \neq r; \beta \neq s$$

oppure  $\alpha = r, \beta \neq s$ , oppure  $\alpha \neq r, \beta = s$ ).

Con gli stessi indici è pure (§ 1) nullo  $(\alpha\beta, rs)_y$  e per la (2) sarà:

$$0 = (\alpha\beta, rs)_y = \sum_{i,k} (ik, ik) \binom{ik}{\alpha\beta} \binom{ik}{rs}.$$

Confrontando con la precedente identità, otteniamo (poichè  $I \neq 0$ ):

$$(8) \quad (ik, ik) \binom{ik}{rs} = \varrho_{rs} C_{rs}^{ik}$$

dove  $\varrho_{rs}$  è un fattore di proporzionalità, dipendente soltanto dagli indici  $r, s$ .  
Nè può essere  $\varrho_{rs} = \infty$ ; chè altrimenti sarebbe  $C_{rs}^{ik} = 0$  e quindi  $I = 0$ .  
Poichè nell'elemento trasformato, il coefficiente di  $dy_m dy_p$  ( $m \neq p$ ) è nullo, avremo che:

$$\sum_{\varepsilon=1}^n a_{\varepsilon\varepsilon} \binom{\varepsilon}{i} \binom{\varepsilon}{k} = 0 \quad (k=r, \text{ oppure } k=s; i \neq r, i \neq s) \\ (r \neq s; r, s = 1, 2, \dots, n).$$

Tenendo fisso  $k$ , facciamo variare  $i$ ; otterremo così  $n-2$  equazioni lineari tra le  $a_{\varepsilon\varepsilon} \binom{\varepsilon}{k}$ . Indichiamo con  $p, q, \varrho$  tre indici distinti ( $< n$ ); ed eliminiamo tra queste equazioni tutte le  $a_{\varepsilon\varepsilon} \binom{\varepsilon}{k}$ , eccetto quelle corrispondenti a  $\varepsilon = p, \varepsilon = q, \varepsilon = \varrho$ . Otteniamo così:

$$[a_{pp} C_{rs}^{pq}] \binom{p}{k} + [a_{qq} C_{rs}^{qp}] \binom{q}{k} + [a_{\varrho\varrho} C_{rs}^{\varrho\varrho}] \binom{\varrho}{k} = 0$$

Queste due equazioni (una per  $k=r$ , e una per  $k=s$ ) danno, risolte, rispetto alle quantità entro [ ] che:

$$(9) \quad a_{pp} C_{rs}^{pq} = \tau_{rs}^{pq\varrho} \binom{q\varrho}{rs} \text{ e analoghe}$$

oltre quelle che si ottengono rotando  $p, q, \varrho$  e ricordando che  $\tau_{rs}^{pq\varrho} = \tau_{rs}^{q\varrho p} = \tau_{rs}^{\varrho pq}$ , dove queste  $\tau$  sono dei fattori di proporzionalità. Se  $\tau_{rs}^{pq\varrho} = \infty$ , allora anche  $\binom{q\varrho}{rs} = \binom{qp}{rs} = \binom{pq}{rs} = 0$ ; ma, per le (8), anche i primi membri di (9) sarebbero nulli; anche in questo caso  $\tau_{rs}^{pq\varrho}$  si può dunque supporre finito. Confrontando (8), (9) otteniamo (posto  $q=i, \varrho=k$ )

$$(10) \quad [a_{pp} (ik, ik) - \varrho_{rs} \tau_{rs}^{pik}] \binom{ik}{rs} = 0$$

e le analoghe, che si ottengono rotando  $p, i, k$  e ricordando che  $\tau^{pik} = \tau^{ikp} = \tau^{kpi}$ . Se due delle  $\binom{ik}{rs}, \binom{kp}{rs}, \binom{pi}{rs}$  sono diverse da zero, p. es. le prime due, allora è:

$$a_{pp}(ik, ik) = \varrho_{rs} \tau_{rs}^{pik} = a_{ii}(kp, kp) \text{ ossia } [ik] = [kp] \text{ ossia } [ikp] = 0.$$



Riassumendo avremo così: Se  $[pik] \neq 0$ , almeno due dei tre simboli  $\binom{pi}{rs}, \binom{ik}{rs}, \binom{kp}{rs}$  ( $r \neq s$ ) sono differenti da zero (comunque siano scelti gli indici distinti  $r, s$ ).

5. Permutando gli indici delle  $x$  e delle  $y$ , potremo supporre che l'indice  $l$  del § 3 sia uguale a 1 e che (poichè  $I \neq 0$ )  $\binom{1}{1}, \binom{12}{12}, \binom{123}{123}, \dots, \binom{12 \dots n-1}{12 \dots n-1}$  siano differenti da zero. Essendo  $[123] \neq 0$ , due almeno dei minori  $\binom{12}{12}, \binom{23}{12}, \binom{31}{12}$  (cfr. § 4) sono nulli; e poichè  $\binom{12}{12} \neq 0$ , sarà  $\binom{23}{12} = \binom{31}{12} = 0$ . Queste sono due equazioni lineari in  $\binom{3}{1}, \binom{3}{2}$ , da cui discende (poichè  $\binom{12}{12} \neq 0$ )  $\binom{3}{1} = \binom{3}{2} = 0$ . Poichè  $\binom{123}{123} \neq 0$ , sarà dunque  $\binom{3}{3} \neq 0$ . Per la stessa ragione almeno uno dei minori  $\binom{32}{23}, \binom{23}{13}, \binom{23}{21}$  è differente da zero; poichè  $0 = \binom{3}{1} = \binom{3}{2}$ , l'ultimo di essi è nullo; e quindi almeno uno dei minori  $\binom{23}{23}, \binom{23}{13}$  è differente da zero. In ogni caso, permutando al più (com'è lecito)  $y_1, y_2$  potremo supporre  $\binom{23}{23} \neq 0$ . E poichè  $[123] \neq 0$ , sarà (cfr. § 4)  $\binom{12}{23} = \binom{13}{23} = 0$ , da cui, come sopra, discende  $\binom{1}{2} = \binom{1}{3} = 0$ . Poichè  $\binom{123}{123} \neq 0$ , sarà  $\binom{1}{1} \neq 0$ , e quindi anche  $\binom{13}{13} \neq 0$ . Ma, poichè  $[123] \neq 0$ , sarà  $\binom{12}{13} = \binom{23}{13} = 0$  e quindi  $\binom{2}{1} = \binom{2}{3} = 0$ . In conclusione soltanto i termini diagonali di  $\binom{123}{123}$  sono diversi da zero. Poichè poi  $\binom{12}{12} \neq 0$  e  $[124] \neq 0$ , sarà (cfr. § 4)  $\binom{14}{12} = \binom{24}{12} = 0$  e quindi  $\binom{4}{1} = \binom{4}{2} = 0$ . Analogamente si prova che  $\binom{4}{3} = 0$  e quindi, poichè  $\binom{1234}{1234} \neq 0$ , che  $\binom{4}{4} \neq 0$ . Sarà perciò  $\binom{14}{14} \neq 0$ ; e quindi, poichè  $[124] \neq 0$ , sarà (cfr. § 4)  $\binom{12}{14} = \binom{24}{14} = 0$ , ossia  $\binom{2}{1} = \binom{2}{4} = 0$ . In modo analogo si prova che  $\binom{1}{4} = \binom{3}{4} = 0$ , ossia che anche in  $\binom{1234}{1234}$  soltanto i termini diagonali sono differenti da zero. Così continuando, si dimostra che anche in I soltanto i termini diagonali

sono differenti da zero, ossia che  $x_i$  è funzione soltanto di  $y_i$ . Il che si può enunciare così (appena si ricordi che noi abbiamo fatto delle permutazioni sugli indici delle  $x$  e delle  $y$ ): *Se lo spazio (1) non è curvatura costante, una trasformazione che porti l'elemento (1) in un elemento dello stesso tipo, può, al più, permutare tra loro le ipersuperficie coordinate. Da cui si deduce che uno spazio (1) a curvatura non costante, non può ammettere più di un sistema coordinato  $x_i$  di Levi-Civita, appunto come per  $n=3$ . Ciò che risolve una prima parte della nostra questione.*

Gli spazî (1) si caratterizzano invariantivamente, come per  $n=3$ , osservando che le linee  $x_i$  sono linee principali, nel senso del prof. Ricci (Atti dell'Istituto Veneto, 1904). Se fosse vero, e si potesse dimostrare in modo semplice e diretto (ciò che non pare possibile senza lunghi calcoli) che le curvature principali sono tutte distinte, si sarebbe in nuovo modo dimostrato il presente teorema.

**Fisica.** — *Sui costituenti radioattivi dei sedimenti di Echail-  
lon e Salins Moutiers.* Nota di G. A. BLANC presentata dal Socio  
P. BLASERNA.

In una Nota pubblicata nel numero di gennaio u. s. del « Philosophical Magazine » annuncio di aver constatato come i sedimenti di alcune acque termali della Savoia, e precisamente di quelle di Echailon presso Saint Jean de Maurienne e di Salins-Moutiers, avessero la proprietà di emettere un'emanazione radioattiva avente caratteri simili a quelli dell'emanazione del Torio, vale a dire la cui attività andava scemando col tempo, riducendosi di metà in circa un minuto primo, e che per di più presentava la proprietà di comunicare ai corpi coi quali veniva a contatto, e specialmente a quelli carichi di elettricità negativa, un'attività indotta la quale andava poi sparendo col tempo riducendosi di metà in circa undici ore. Inoltre era possibile mediante riscaldamento di estrarre da quei medesimi fanghi delle tracce di emanazione di tipo radio, vale a dire la cui attività andava riducendosi col tempo cadendo a metà in poco più di tre giorni e capace di provocare un'attività indotta riducentesi di metà in circa mezz'ora. Era ovvio quindi ammettere che quei sedimenti dovessero contenere, oltre alle tracce di radio che vari sperimentatori avevano constatate nei depositi di molte sorgenti, anche dei sali di torio; tuttavia era notevole il fatto che la quantità di emanazione che da essi si poteva ottenere sembrava richiedere la presenza di quantità abbastanza rilevanti di questo elemento, mentre sino allora non si era mai inteso a parlare di giacimenti toriferi in quelle regioni.

È noto che le quantità di emanazione che si possono estrarre da un dato peso di torio dipendono dal suo stato di combinazione; l'idrato, ad



esempio, che è il composto dotato di maggior potere emanante, ne mette in libertà una quantità centinaia di volte maggiore di quella che si può ottenere dagli altri sali. Ora anche nell'ipotesi che il torio si fosse trovato nei fanghi in condizioni tali da liberare la maggior quantità possibile di emanazione, si doveva concludere che esso costituiva dal tre al quattro per cento della loro massa totale.

Alla fine della suddetta Nota annunciavo di aver intrapreso una ricerca allo scopo di separare dai fanghi i costituenti radioattivi in essi contenuti. Tale lavoro, incominciato con piccole quantità di materiale, non diede a tutta prima risultati concludentissimi. Il metodo da me adottato consisteva nell'attaccare il sedimento di Echaillon o di Salins-Moutiers con acqua regia, evaporare a secchezza per far passare la silice allo stato insolubile, indi riprendere con acido cloridrico diluito e filtrare; ottenevo in questo modo una soluzione fortemente colorata in giallo da percloruro di ferro; il residuo insolubile non si dimostrava che debolmente attivo.

Lasciando la soluzione a sè per un certo tempo, era possibile ottenere da essa delle tracce di emanazione di tipo radio, facendovi gorgogliare dell'aria. Aggiungendo poi qualche goccia di acido solforico ottenevo un leggerissimo precipitato di solfati dotato di forte attività, ma privo completamente di emanazione del tipo torio. I prodotti in tal modo ottenuti presentavano un'attività che era varie centinaia di volte superiore a quella di un ugual peso di nitrato d'uranile.

È noto che un sale di radio, il quale dopo essere stato in soluzione viene condotto allo stato solido, mostra durante un certo periodo di tempo successivo alla sua preparazione un aumento notevole di attività dovuto al fatto che l'emanazione la quale sfugge da esso mentre è in soluzione, rimane invece occlusa allorquando il sale stesso si trova allo stato solido, accumulandosi in esso ed accrescendone quindi l'attività; s'ottiene uno stato di equilibrio radioattivo, solo allorquando la quantità di emanazione prodotta è compensata in ogni istante dalla quantità di essa che si distrugge. Ora un fatto notevole è che i prodotti da me ottenuti nel suddetto modo non mostravano dopo la loro preparazione che un piccolissimo incremento di attività, in nessun modo paragonabile a quello che si sarebbe osservato in condizioni normali con un sale di radio. Delle esperienze da me fatte in proposito mi mostrarono infatti che precipitando allo stato di solfato una piccola quantità di cloruro di bario radifero proveniente dalla Société Centrale de Produits Chimiques di Parigi, l'aumento relativo di attività subito dal sale dopo la sua preparazione era incomparabilmente maggiore di quello che osservavo coi solfati ottenuti dalla soluzione cloridrica dei sedimenti.

Non ho ancora potuto giungere ad una conclusione definitiva, ma non mi sembra improbabile che in quei prodotti esista, oltre a tracce di radio, un'altra sostanza attiva; sono in corso delle esperienze per chiarire tale

questione e spero potere presto comunicare dei risultati definitivi in proposito.

Dopo la separazione dei solfati attivi di cui ho parlato ora, aggiungevo alla soluzione cloridrica dell'ammoniaca, ottenendo così un voluminoso precipitato di idrati, il quale mostravasi notevolmente più attivo del fango primitivo. Col trattare questi idrati con acido ossalico veniva mandata in soluzione la totalità del ferro in essi contenuto, ed il residuo insolubile veniva convertito in ossido, mediante calcinazione, e questo alla sua volta, trattato con acido solforico diluito nel suo peso d'acqua. In tal modo ottenevo da una parte un residuo insolubile contenente ancora una certa quantità dei solfati attivi menzionati sopra, e dall'altra una soluzione dalla quale era possibile, mediante l'aggiunta di ammoniaca, di ottenere un precipitato di idrati la cui attività ed il cui potere emanante erano in genere superiori a quelli di un egual peso di idrato di torio. Data la scarsità dei prodotti così ottenuti non mi fu tuttavia possibile il raggiungere un'ulteriore concentrazione dell'attività, e non credetti perciò di poter trarre conclusioni definitive prima di aver operato su quantità maggiori di materiale.

Mi rivolsi quindi al Sindaco della Città di Saint Jean di Maurienne, il quale gentilmente mi rispose che avrebbe provveduto a far vuotare i bacini sottostanti allo Stabilimento di Echaillon allo scopo di estrarne la maggior quantità possibile di fanghi. L'operazione tuttavia non poté aver luogo se non a primavera inoltrata.

Nel frattempo i sigg. Elster e Geitel pubblicavano una loro ricerca intorno alla radioattività dei fanghi di Baden-Baden e di Bad-Nauheim <sup>(1)</sup>, dalla quale risultava che essi avevano potuto constatare la presenza in quei fanghi di una sostanza la quale pur presentando gli stessi caratteri radioattivi del torio, mostravasi assai più attiva a parità di peso.

A questo lavoro dei sigg. Elster e Geitel fece seguito una Nota preliminare del sig. Hahn <sup>(2)</sup>, il quale annunziava di aver separato da residui di Torianite una sostanza, la quale era dotata di attività e di potere emanante immensamente superiori a quelli di un ugual peso di sale di torio.

Dal canto mio, avendo finalmente a mia disposizione una certa quantità di sedimenti la cui attività era notevolmente superiore a quella del materiale primitivamente trattato, avevo ripreso i tentativi per ottenere una concentrazione maggiore dell'attività stessa.

Dei vari metodi da me tentati per raggiungere tale scopo non descriverò che quello che mi ha dato i migliori risultati. Farò notare intanto a questo proposito che la maggior difficoltà che ho incontrato nel mio lavoro è stata causata dalla tendenza che ha la sostanza radioattiva in questione

(1) *Physikalische Zeitschrift*, 1 febbraio 1905.

(2) *Zeitschr. für phys. Chemie*, 9 maggio 1905.



ad essere trascinata dai precipitati formati nella sua soluzione; ne risulta, infatti, che gran parte della materia attiva viene persa nel corso delle varie operazioni.

Il procedimento consisteva nel trattare anzitutto il materiale, il quale si presenta sotto forma di una polvere bruna rossastra, con acido cloridrico diluito, il che aveva per effetto di mandare in soluzione la massima parte del ferro in esso contenuto, pur rimanendo l'attività di tipo torio quasi totalmente nel residuo insolubile. Questo residuo veniva quindi trattato con acqua regia bollente, evaporato a secchezza e ripreso con acido cloridrico prima concentrato e poi diluito; ottenevo in tal modo di mandare in soluzione buona parte della sostanza attiva, la quale veniva poi precipitata mediante ammoniaca insieme al ferro che non era stato eliminato nel primo trattamento con acido cloridrico diluito. Gli idrati così ottenuti, trattati con acido ossalico, lasciavano un residuo il quale veniva sottoposto alle operazioni già descritte prima, vale a dire veniva calcinato e poi trattato con acido solforico diluito nel suo peso d'acqua. Ottenevo così una soluzione dalla quale, mediante l'aggiunta di ammoniaca, separavo un precipitato di idrati avente un'attività varie centinaia di volte superiore a quella di un ugual peso di idrato di torio.

Con prodotti di questo genere mi è stato possibile di determinare le costanti di disattivazione tanto dell'emanazione quanto dell'attività indotta, ed ho trovato dei risultati i quali si possono considerare come identici a quelli ottenuti da Rutherford pei sali di torio.

Ecco ad esempio una delle serie di misure della disattivazione dell'emanazione eseguita secondo il metodo da me descritto nella Nota già citata.

*Disattivazione dell'emanazione.*

| Tempi in min. sec. | Attività |
|--------------------|----------|
| 0                  | 100      |
| 22                 | 75.9     |
| 37.5               | 61.4     |
| 59                 | 44.4     |
| 80.5               | 35.2     |
| 100                | 26       |
| 131.5              | 22       |
| 181.5              | 12.2     |

La curva corrispondente è rappresentata nella fig. 1 in cui sono anche indicati i risultati ottenuti da Rutherford per l'emanazione prodotta dai sali di torio.



Come è noto, i fenomeni di disattivazione si possono tutti rappresentare mediante una formola esponenziale del tipo:

$$I_t = I_0 e^{-\lambda t}$$

in cui  $I_0$  rappresenta l'attività ad un tempo che si sceglie come iniziale,  $I_t$  l'attività ad un tempo successivo qualunque  $t$ , e la base dei logaritmi ordinari e  $\lambda$  una costante che varia a seconda della natura della sostanza attiva.

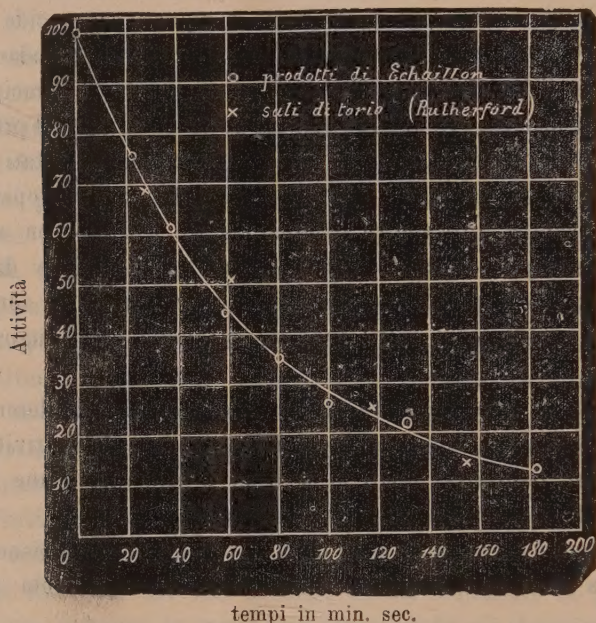


FIG. 1. — Disattivazione dell'emanazione.

Ho calcolato perciò  $\lambda$  in corrispondenza alla suddetta serie di osservazioni, assumendo per unità di tempo il minuto secondo, ed ho trovato per essa il valore:

$$\lambda = 0.0121$$

Il valore trovato da Rutherford per l'emanazione del torio è:

$$\lambda = 0.0115$$

In quanto poi all'attività indotta, ho eseguito buon numero di misure che tutte hanno dato risultati concordanti. Allorquando l'esposizione del corpo da attivarsi all'azione dell'emanazione non era stata che di breve durata, vale a dire di qualche ora, vi era all'inizio o un leggero aumento, o un periodo stazionario dell'attività, similmente a ciò che Rutherford e in seguito anche Sella e Miss Brookes hanno osservato coi sali di torio. Per lunghe esposizioni,



vale a dire di due o tre giorni, la disattivazione seguiva invece la legge esponenziale solita sino dal momento in cui cessava l'azione attivante dell'emanazione.

La seguente è una delle serie di misure da me eseguite con una lamina di stagnola rimasta esposta all'azione dell'emanazione per 48 ore, e mantenuta carica ad un potenziale negativo di circa 500 volt mediante una pila secca di Zamboni.

*Decremento dell'attività indotta.*

| Tempo in ore | Attività |
|--------------|----------|
| 0            | 100      |
| 0.5          | 99.7     |
| 3.2          | 79.7     |
| 4.9          | 73.8     |
| 6.8          | 64.2     |
| 10.5         | 52.3     |
| 15.5         | 36       |
| 22.6         | 23.8     |
| 27.2         | 18.2     |
| 36           | 10.6     |
| 45.3         | 6.4      |
| 52           | 3.7      |
| 59.2         | 2.24     |
| 69.3         | 1.30     |
| 77.8         | 0.75     |

La curva corrispondente è rappresentata nella figura 2, dalla quale si può vedere come i miei risultati concordino con quelli trovati da Rutherford per l'emanazione indotta del torio.

La costante quale l'ho calcolata dalla serie di misure che precede, è:

$$\lambda = 0.0629$$

mentre il valore corrispondente trovato da Rutherford pel torio è:

$$\lambda = 0.0624$$

Da tutto ciò che precede mi sembra poter concludere che, come sembra anche risultare dal lavoro di Elster e Geitel e da quello di Hahn, i fenomeni radioattivi che si osservano nei sali di torio non siano dovuti ad una proprietà intrinseca di quell'elemento stesso, ma siano invece dovuti alla presenza in essi di tracce di un elemento dotato da grande attività, che non si è potuto sinora separare dal torio in conseguenza dell'analogia dei loro caratteri chimici.



Non è possibile il dire per ora se questo elemento sia o no un prodotto di trasformazione del torio, allo stesso modo come, per quanto risulta dalle esperienze di Soddy, il radio è un prodotto di trasformazione dell'uranio. Hoffmann e Zerban hanno affermato di aver ottenuto del torio inattivo. Nell'ipotesi che le loro esperienze fossero precise e che la sostanza attiva di cui sopra fosse effettivamente un prodotto di trasformazione del torio, bisogne-

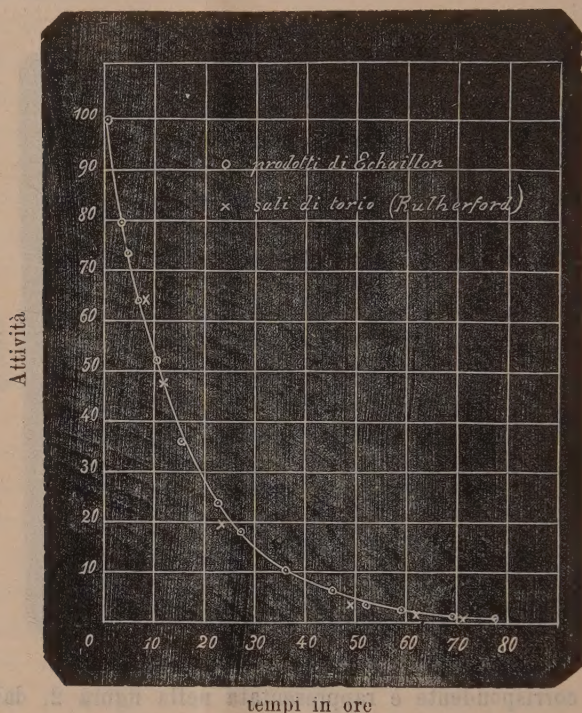


FIG. 2. — Decremento dell'attività indotta.

rebbe ammettere che il trattamento chimico fatto subire ai loro preparati dai suddetti sperimentatori fosse tale da permettere la separazione dei due corpi.

Questo lavoro è stato incominciato nel Laboratorio Municipale della città di Chambéry ed è stato terminato nell'Istituto Chimico Farmaceutico della R. Università di Roma. Tengo a ringraziare nel modo più sincero i rispettivi Direttori, dottore D. Hollande e professore L. Balbiano, per la cortesia colla quale hanno messo a mia disposizione tutto quanto poteva occorrermi. Desidero anche ringraziare il Sindaco ed il Consiglio Municipale di Saint Jean de Maurienne, nonchè il dottor Laissus di Salins-Moutiers ed il sig. Truchet, per avermi cortesemente fornito il materiale che ha servito a questa ricerca.

V. C.